

УДК 517.5

**Е.А. Севостьянов** (Житомирский государственный университет им. И. Франко)

**Є.О. Севостьянов** (Житомирський державний університет ім. І. Франко)

**E.A. Sevost'yanov** (Ivan Franko Zhitomir State University)

**О равностепенной непрерывности гомеоморфизмов в замыкании области метрического пространства**

**Про одностайну неперервність гомеоморфізмів в замиканні області метричного простору**

**On equicontinuity of homeomorphisms in a closure of a domain in metric spaces**

В работе изучаются гомеоморфизмы на метрических пространствах, обобщающие квазиконформные отображения. Установлено, что семейства указанных отображений при определённых условиях на метрические пространства и границы соответствующих областей являются равностепенно непрерывными в замыкании заданной области.

В роботі вивчаються гомеоморфізми на метричних просторах, що узагальнюють квазіконформні відображення. Встановлено, що сім'ї вказаних відображень за деяких умов на метричні простори і межі відповідних областей є одностайно неперервними в замиканні заданої області.

In the present paper, homeomorphisms in metric spaces which generalize quasiconformal mappings, are investigated. It is proved that, at some conditions on metric spaces and boundaries of corresponding domains, families of above mappings are equicontinuous in a closure of a given domain.

**1. Введение.** В настоящей заметке речь идёт об изучении гомеоморфизмов, представляющих собой квазиконформные отображения с весом (см. [1, гл. 7], [2] и [3]). Здесь мы исследуем локальное поведение так называемых  $Q$ -гомеоморфизмов, изучавшееся автором в  $\mathbb{R}^n$ , в метрических пространствах (см., напр., [4] и [5]). Упомянем также работу [6], где приведено описание многих свойств  $Q$ -гомеоморфизмов в метрических пространствах. Здесь, в частности, затронуты вопросы граничного поведения и устранения изолированной особенности, однако вопросы локального поведения, а также некоторые другие вопросы тут не были изучены.

Хорошо известно, что отображения классов Соболева и Орлича–Соболева в пространстве  $\mathbb{R}^n$  удовлетворяют соотношениям вида

$$M(f(\Gamma)) \leq \int_{\varepsilon < |x - x_0| < \varepsilon_0} Q(x) \eta^n(|x - x_0|) dm(x) \quad (1)$$

для произвольной измеримой по Лебегу функции  $\eta : [\varepsilon, \varepsilon_0] \rightarrow [0, \infty]$  такой, что  $\int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \eta(t) dt \geq 1$ , где  $\Gamma$  – семейство кривых, соединяющих сферы с центром в точке  $x_0$  и радиусов  $\varepsilon$  и  $\varepsilon_0$ ,  $m$  – мера Лебега в  $\mathbb{R}^n$ , а  $M$  – конформный модуль семейств кривых (см., напр., [7, следствие 5] и [8, теорема 1]). Наша ближайшая цель – изучить некоторые свойства отображений аналогичным тем, что удовлетворяют соотношениям (1), в метрических пространствах. Основное внимание уделяется свойству равностепенной непрерывности отображений в замыкании области.

Остановимся теперь на статье [9], где нами была показана равностепенная непрерывность упомянутых отображений в  $n$ -мерном евклидовом пространстве. Отметим, что здесь речь идёт о равностепенной непрерывности отображений в замыкании области, включая как внутренние, так и граничные точки. Дополняя результаты этой работы, мы покажем, что указанные свойства имеют место в более общих метрических пространствах, а не только в  $\mathbb{R}^n$ . Таким образом, основная цель настоящей статьи – распространение результатов, касающихся равностепенной непрерывности одного класса отображений в замыкании области, на некоторый класс метрических пространств.

Напомним следующие определения. В дальнейшем  $(X, d, \mu)$  и  $(X', d', \mu')$  – метрические пространства с метриками  $d$  и  $d'$  и борелевскими мерами  $\mu$  и  $\mu'$ . Кривой  $\gamma$  в  $X$  называется непрерывное отображение  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ . *Длиной кривой  $\gamma$  на отрезке  $[a, b]$  называется величина*

$$l(\gamma) := \sup \sum_{i=1}^n d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i-1})),$$

где  $\sup$  берётся по всем возможным разбиениям  $a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n := b$ . Если  $l(\gamma) < \infty$ , кривая называется спрямляемой и, значит, корректно определена функция длины  $s_\gamma(t)$ , означающая длину кривой  $\gamma_{[a, t]}$ ,  $t \in [a, b]$ . В таком случае, имеет место представление

$$\gamma(t) = \gamma^0 \circ s_\gamma(t),$$

где  $\gamma^0$  называется *нормальным представлением* кривой  $\gamma$ . Интегралом от борелевской функции  $\rho : G \rightarrow [0, \infty]$  называется величина

$$\int_{\gamma} \rho(x) |dx| = \int_0^{l(\gamma)} \rho(\gamma^0(t)) dt.$$

Под семейством кривых  $\Gamma$  подразумевается некоторый фиксированный набор кривых  $\gamma$ . Борелева функция  $\rho : X \rightarrow [0, \infty]$  называется *допустимой* для семейства  $\Gamma$  кривых  $\gamma$  в  $\mathbb{R}^n$ , если

$$\int_{\gamma} \rho(x) |dx| \geq 1 \quad (2)$$

для всех (локально спрямляемых) кривых  $\gamma \in \Gamma$  (т.е., произвольная кривая  $\gamma$  семейства  $\Gamma$  имеет длину, не меньшую 1 в метрике  $\rho$ ). В этом случае мы пишем:  $\rho \in \text{adm } \Gamma$ .

Для фиксированного  $p \geq 1$   $p$ -модулем семейства кривых  $\Gamma$  называется величина

$$M_p(\Gamma) = \inf_{\rho \in \text{adm } \Gamma} \int_X \rho^p(x) d\mu(x).$$

При этом, если  $\text{adm } \Gamma = \emptyset$ , то полагаем:  $M_p(\Gamma) = \infty$  (см. [10, разд. 6 на с. 16]).

Говорят, что семейство кривых  $\Gamma_1$  *минорируется* семейством  $\Gamma_2$ , пишем  $\Gamma_1 > \Gamma_2$ , если для каждой кривой  $\gamma \in \Gamma_1$  существует подкривая, которая принадлежит семейству  $\Gamma_2$ . В этом случае,

$$\Gamma_1 > \Gamma_2 \quad \Rightarrow \quad M_p(\Gamma_1) \leq M_p(\Gamma_2) \quad (3)$$

(см. [11, теорема 1]).

Пусть  $E, F \subset X$  – произвольные множества. В дальнейшем всюду символом  $\Gamma(E, F, X)$  мы обозначаем семейство всех кривых  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ , которые соединяют  $E$  и  $F$  в  $X$ , т.е.  $\gamma(a) \in E$ ,  $\gamma(b) \in F$  и  $\gamma(t) \in X$  при  $t \in (a, b)$ . Пусть  $G$  и  $G'$  – области с конечными хаусдорфовыми размерностями  $\alpha \geq 2$  и  $\alpha' \geq 2$  в метрических пространствах  $(X, d, \mu)$  и  $(X', d', \mu')$ , соответственно, и пусть  $Q : G \rightarrow [0, \infty]$  – измеримая функция. Всюду далее

$$B(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}, S(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) = r\},$$

$$A = A(x_0, r_1, r_2) = \{x \in X : r_1 < d(x, x_0) < r_2\}. \quad (4)$$

Зафиксируем  $p, q \geq 1$  и будем называть гомеоморфизм  $f : G \rightarrow G'$  *кольцевым*  $(p, q, Q)$ -гомеоморфизмом в точке  $x_0 \in G$ , если при любых  $0 < r_1 < r_2 < \text{dist}(x_0, \partial G)$  и для любых сфер  $S_1 = S(x_0, r_1)$  и  $S_2 = S(x_0, r_2)$  выполнено неравенство

$$M_p(f(\Gamma(S_1, S_2, A))) \leq \int_A Q(x) \cdot \eta^q(d(x, x_0)) d\mu(x) \quad (5)$$

для каждой измеримой функции  $\eta : (r_1, r_2) \rightarrow [0, \infty]$  такой, что

$$\int_{r_1}^{r_2} \eta(r) dr \geq 1, \quad (6)$$

где  $A = A(x_0, r_1, r_2)$ .

Пусть  $(X, d)$  и  $(X', d')$  — метрические пространства с расстояниями  $d$  и  $d'$ , соответственно. Семейство  $\mathfrak{F}$  непрерывных отображений  $f: X \rightarrow X'$  называется *нормальным*, если из любой последовательности отображений  $f_m \in \mathfrak{F}$  можно выделить подпоследовательность  $f_{m_k}$ , которая сходится локально равномерно в  $X$  (т.е., равномерно на любых компактных подмножествах  $X$ ) к непрерывной функции  $f: X \rightarrow X'$ .

Введенное понятие очень тесно связано со следующим. Семейство  $\mathfrak{F}$  отображений  $f: X \rightarrow X'$  называется *равностепенно непрерывным в точке*  $x_0 \in X$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  найдётся такое  $\delta > 0$ , что  $d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$  для всех таких  $x$ , что  $d(x, x_0) < \delta$  и для всех  $f \in \mathfrak{F}$ . Говорят, что  $\mathfrak{F}$  *равностепенно непрерывно*, если  $\mathfrak{F}$  равностепенно непрерывно в каждой точке  $x_0 \in X$ . Согласно одной из версий теоремы Арцела–Асколи (см., напр., [10, пункт 20.4]), если  $(X, d)$  — сепарабельное метрическое пространство, а  $(X', d')$  — компактное метрическое пространство, то семейство  $\mathfrak{F}$  отображений  $f: X \rightarrow X'$  нормально тогда и только тогда, когда  $\mathfrak{F}$  равностепенно непрерывно.

Следующее определение может быть найдено, напр., в [6, разд. 4]. Будем говорить, что интегрируемая в  $B(x_0, r)$  функция  $\varphi: G \rightarrow \mathbb{R}$  имеет *конечное среднее колебание* в точке  $x_0 \in G$ , пишем  $\varphi \in FMO(x_0)$ , если

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\mu(B(x_0, \varepsilon))} \int_{B(x_0, \varepsilon)} |\varphi(x) - \bar{\varphi}_\varepsilon| d\mu(x) < \infty,$$

где  $\bar{\varphi}_\varepsilon = \frac{1}{\mu(B(x_0, \varepsilon))} \int_{B(x_0, \varepsilon)} \varphi(x) d\mu(x)$ .

Пусть  $(X, d, \mu)$  — метрическое пространство с метрикой  $d$ , наделённое локально конечной борелевской мерой  $\mu$ . Следуя [12, раздел 7.22] будем говорить, что борелева функция  $\rho: X \rightarrow [0, \infty]$  является *верхним градиентом* функции  $u: X \rightarrow \mathbb{R}$ , если для всех спрямляемых кривых  $\gamma$ , соединяющих точки  $x$  и  $y \in X$  выполняется неравенство  $|u(x) - u(y)| \leq \int_\gamma \rho |dx|$ . Будем также говорить, что в указанном пространстве  $X$  выполняется  $(1; p)$ -неравенство Пуанкаре, если найдутся постоянные  $C \geq 1$  и  $\tau > 0$  так, что для каждого шара  $B \subset X$ , произвольной локально ограниченной непрерывной функции  $u: X \rightarrow \mathbb{R}$  и любого её верхнего градиента  $\rho$  выполняется следующее неравенство:

$$\frac{1}{\mu(B)} \int_B |u - u_B| d\mu(x) \leq C \cdot (\text{diam } B) \left( \frac{1}{\mu(\tau B)} \int_{\tau B} \rho^p d\mu(x) \right)^{1/p},$$

где  $u_B := \frac{1}{\mu(B)} \int_B u d\mu(x)$ . Метрическое пространство  $(X, d, \mu)$  назовём  *$\tilde{Q}$ -регулярным по Альфорсу* при некотором  $\tilde{Q} \geq 1$ , если при каждом  $x_0 \in X$ , некоторой постоянной  $C \geq 1$  и произвольного  $R < \text{diam } X$

$$\frac{1}{C} R^{\tilde{Q}} \leq \mu(B(x_0, R)) \leq C R^{\tilde{Q}}.$$

Здесь иногда берутся замкнутые шары  $\overline{B}(x_0, R)$ , что ввиду предельных свойств меры не является принципиальным (см. [13, теорема 9.1, гл. I]). Как известно,  $\alpha$ -регулярные по Альфорсу пространства имеют хаусдорфову размерность  $\alpha$  (см. [12, с. 61–62]). Более того, нетрудно видеть, что в таких пространствах области  $G$  также имеют хаусдорфову размерность  $\alpha$  (см. там же). Условимся говорить, что метрическое пространство  $X$  *локально связно*, если для произвольной окрестности  $U$  произвольной точки  $x_0 \in X$  найдётся окрестность  $V \subset U$ , являющаяся связной (см. [14, I.49.6]). Справедлива следующая

**Теорема 1.** Пусть  $G$  – область в локально связном и локально компактном метрическом пространстве  $(X, d, \mu)$  с конечной хаусдорфовой размерностью  $\alpha \geq 2$ , а  $(X', d', \mu')$  – метрическое пространство, которое является  $\alpha'$ -регулярным по Альфорсу, и в котором выполнено  $(1; p)$ -неравенство Пуанкаре,  $p \in [\alpha' - 1, \alpha']$ .

Пусть  $B_R \subset X'$  – некоторый фиксированный шар радиуса  $R$ . Обозначим через  $\mathfrak{R}_{p,q,x_0,Q,B_R,\delta}(G)$  семейство кольцевых  $(p, q, Q)$ -гомеоморфизмов  $f: G \rightarrow B_R \setminus K_f$  в точке  $x_0 \in G$  таких, что  $\sup_{x,y \in K_f} d'(x, y) \geq \delta > 0$ , где  $K_f \subset B_R$  – некоторый континуум. Тогда семейство отображений  $\mathfrak{R}_{p,q,x_0,Q,B_R,\delta}(G)$  является равностепенно непрерывным в точке  $x_0 \in G$ , если  $q \in (1, \alpha]$  и  $Q \in FMO(x_0)$ .

Как будет видно из дальнейшего, приведённый результат, касающийся равностепенной непрерывности отображений, распространяется также на точки замыкания области, а не только на внутренние её точки. При этом, здесь требуются определённые дополнительные условия на границу области. В связи с этим, напомним некоторые определения, а также приведём важный вспомогательный результат о продолжении гомеоморфизмов в метрических пространствах.

Область  $D$  называется *локально связной в точке*  $x_0 \in \partial D$ , если для любой окрестности  $U$  точки  $x_0$  найдётся окрестность  $V \subset U$  такая, что множество  $V \cap D$  связно (см. [14, I.49.6]). Аналогично, область  $D$  будет называться *локально линейно связной в точке*  $x_0 \in \partial D$ , если для любой окрестности  $U$  точки  $x_0$  найдётся окрестность  $V \subset U$  такая, что множество  $V \cap D$  линейно связно. Согласно [15], область  $D$  в  $\mathbb{R}^n$  будем называть *областью квазиэкстремальной длины относительно  $p$ -модуля*, сокр. *QED-областью относительно  $p$ -модуля*, если

$$M_p(\Gamma(E, F, X)) \leq A \cdot M_p(\Gamma(E, F, D)) \quad (7)$$

для конечного числа  $A \geq 1$  и всех континуумов  $E$  и  $F$  в  $D$ . Пусть  $p, q \geq 1$ ,  $D$  – область в метрическом пространстве  $(X, d, \mu)$  с конечной хаусдорфовой размерностью  $\alpha \geq 2$ ,  $Q: X \rightarrow [0, \infty]$  – измеримая функция,  $Q(x) \equiv 0$  при всех  $x \notin D$ . Отображение  $f: D \rightarrow X$  будем называть *кольцевым  $(p, q, Q)$ -отображением в точке*  $x_0 \in \partial D$ , если для некоторого  $r_0 = r(x_0)$ , произвольных кольца  $A = A(x_0, r_1, r_2)$ , центрированного в точке  $x_0$ , радиусов:  $r_1, r_2$ ,  $0 < r_1 < r_2 < r_0 = r(x_0)$  и любых континуумов  $E_1 \subset \overline{B}(x_0, r_1) \cap D$ ,  $E_2 \subset (X \setminus \overline{B}(x_0, r_2)) \cap D$  отображение  $f$  удовлетворяет соотношению

$$M_p(f(\Gamma(E_1, E_2, D))) \leq \int_A Q(x) \cdot \eta^q(d(x, x_0)) d\mu(x) \quad (8)$$

для каждой измеримой функции  $\eta : (r_1, r_2) \rightarrow [0, \infty]$ , такой что имеет место соотношение (6).

Имеет место следующая теорема.

**Теорема 2.** Пусть  $G$  – область в метрическом пространстве  $(X, d, \mu)$  с локально конечной борелевской мерой  $\mu$  и конечной хаусдорфовой размерностью  $\alpha \geq 2$ , а  $(X', d', \mu')$  – метрическое пространство, являющееся  $\alpha'$ -регулярным по Альфорсу, в котором выполнено  $(1; p)$ -неравенство Пуанкаре,  $p \in [\alpha' - 1, \alpha']$ . Пусть также область  $G$  локально линейно связна в точках границы, а область  $G' \subset B_R$  является  $QED$ -областью относительно  $p$ -модуля, где  $B_R$  – некоторый шар в  $X'$ , такой что  $\overline{B_R}$  – компакт в  $X'$ . Тогда произвольный кольцевой  $(p, q, Q)$ -гомеоморфизм  $f : G \rightarrow G'$  в точке  $b \in \partial G$  такой, что  $f(G) = G'$ ,  $q \in (1, \alpha]$ , имеет непрерывное продолжение в точку  $b$  при условии, что  $Q \in FMO(b)$ .

Обозначим через  $\mathfrak{R}_{p,q,Q,a_0,b_0}(G, G')$  семейство, состоящее из всех кольцевых  $(p, q, Q)$ -гомеоморфизмов  $f : G \rightarrow G'$  в каждой точке  $x_0 \in \overline{G}$  таких, что  $f(a_0) = a_1 \neq b_1 = f(b_0)$ ,  $f(G) = G'$ . Основной результат настоящей работы заключает в себе следующее утверждение.

**Теорема 3.** Пусть  $G$  – область в локально связном и сепарабельном метрическом пространстве  $(X, d, \mu)$  с конечной хаусдорфовой размерностью  $\alpha \geq 2$ , локально линейно связная в каждой точке своей границы, а  $(X', d', \mu')$  – метрическое пространство,  $\alpha'$ -регулярное по Альфорсу, в котором выполнено  $(1; p)$ -неравенство Пуанкаре,  $p \in [\alpha' - 1, \alpha']$ . Предположим, область  $G' \subset B_R$  является  $QED$ -областью относительно  $p$ -модуля,  $G' \subset B_R$ ,  $B_R$  – некоторый фиксированный шар в  $X'$ , такой, что  $\overline{B_R}$  компакт, причём найдётся невырожденный континуум  $K \subset B_R \setminus G'$ .

Пусть  $Q \in FMO(\overline{G})$  и  $q \in (1, \alpha]$ . Тогда каждое отображение семейства  $\mathfrak{R}_{p,q,Q,a_0,b_0}(G, G')$  продолжается по непрерывности на  $\partial G$ , при этом, семейство  $\overline{\mathfrak{R}_{p,q,Q,a_0,b_0}(G, G')}$ , состоящее из всех продолженных таким образом отображений  $f : \overline{G} \rightarrow \overline{G'}$  является равномерно непрерывным в каждой точке  $x_0 \in \overline{G}$ .

**2. Равностепенная непрерывность гомеоморфизмов внутри области.** Следующая лемма может быть полезной при исследовании свойства равностепенной непрерывности  $Q$ -гомеоморфизмов, удовлетворяющих (5), в наиболее общей ситуации.

**Лемма 1.** Пусть  $G$  – область в метрическом пространстве  $(X, d, \mu)$  с конечной хаусдорфовой размерностью  $\alpha \geq 2$ , а  $(X', d', \mu')$  – также, некоторое метрическое пространство с конечной хаусдорфовой размерностью  $\alpha' \geq 2$ . Пусть  $p, q \geq 1$  и  $f : G \rightarrow X'$  – кольцевой  $(p, q, Q)$ -гомеоморфизм в точке  $x_0 \in G$ , кроме того, пусть  $r_0 > 0$  таково, что шар  $B(x_0, r_0)$  лежит со своим замыканием в  $G$ . Предположим, что для некоторого числа  $0 < \varepsilon_0 < r_0$ , некоторого  $\varepsilon'_0 \in (0, \varepsilon_0)$  и семейства неотрицательных измеримых по Лебегу функций  $\{\psi_\varepsilon(t)\}$ ,  $\psi_\varepsilon : (\varepsilon, \varepsilon_0) \rightarrow [0, \infty]$ ,  $\varepsilon \in (0, \varepsilon'_0)$ , выполнено условие

$$\int_{\varepsilon < d(x, x_0) < \varepsilon_0} Q(x) \cdot \psi_\varepsilon^q(d(x, x_0)) d\mu(x) \leq F(\varepsilon, \varepsilon_0) \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon'_0), \quad (9)$$

где  $F(\varepsilon, \varepsilon_0)$  — некоторая функция и

$$0 < I(\varepsilon, \varepsilon_0) := \int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi_{\varepsilon}(t) dt < \infty \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon'_0). \quad (10)$$

Тогда для сфер  $S_1 = S(x_0, \varepsilon)$  и  $S_2 = S(x_0, \varepsilon_0)$ ,  $0 < \varepsilon < \varepsilon'_0$  выполнено неравенство

$$M_p(f(\Gamma(S_1, S_2, A))) \leq F(\varepsilon, \varepsilon_0)/I^q(\varepsilon, \varepsilon_0) \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon'_0), \quad (11)$$

где  $A = \{x \in G : \varepsilon < d(x, x_0) < \varepsilon_0\}$ .

*Доказательство.* Рассмотрим семейство измеримых функций  $\eta_{\varepsilon}(t) = \psi_{\varepsilon}(t)/I(\varepsilon, \varepsilon_0)$ ,  $t \in (\varepsilon, \varepsilon_0)$ . Заметим, что для  $\varepsilon \in (0, \varepsilon'_0)$  выполнено равенство  $\int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \eta_{\varepsilon}(t) dt = 1$ . Тогда из определения кольцевого  $(p, q, Q)$ -гомеоморфизма в точке  $x_0$  и соотношений (9) получаем неравенство (11).  $\square$

Справедливо следующее утверждение (см. [16, предложение 4.7]).

**Предложение 1.** Пусть  $X$  —  $\alpha$ -регулярное по Альфорсу метрическое пространство с мерой, в котором выполняется  $(1; p)$ -неравенство Пуанкаре,  $\alpha \geq 1$ ,  $p > 1$ . Тогда для произвольных континуумов  $E$  и  $F$ , содержащихся в шаре  $B(x_0, R)$ , и некоторой постоянной  $C > 0$  выполняется неравенство

$$M_p(\Gamma(E, F, X)) \geq \frac{1}{C} \cdot \frac{\min\{\text{diam } E, \text{diam } F\}}{R^{1+p-\alpha}}.$$

Теперь сформулируем и докажем утверждение о равностепенной непрерывности кольцевых  $(p, q, Q)$ -гомеоморфизмов между метрическими пространствами в «максимальной» степени общности.

**Лемма 2.** Пусть  $G$  — область в локально связном и локально компактном метрическом пространстве  $(X, d, \mu)$  с конечной хаусдорфовой размерностью  $\alpha \geq 2$ , а  $(X', d', \mu')$  — метрическое пространство,  $\alpha'$ -регулярное по Альфорсу, в котором выполнено  $(1; p)$ -неравенство Пуанкаре,  $p \in [\alpha' - 1, \alpha']$ .

Пусть  $r_0 > 0$  таково, что шар  $B(x_0, r_0)$  лежит со своим замыканием в  $G$  и  $0 < \varepsilon_0 < r_0$ . Предположим также, что для некоторого числа  $\varepsilon'_0 \in (0, \varepsilon_0)$  и семейства неотрицательных измеримых по Лебегу функций  $\{\psi_{\varepsilon}(t)\}$ ,  $\psi_{\varepsilon}: (\varepsilon, \varepsilon_0) \rightarrow (0, \infty)$ ,  $\varepsilon \in (0, \varepsilon'_0)$ , выполнено условие (9), где некоторая заданная функция  $F(\varepsilon, \varepsilon_0)$  удовлетворяет условию  $F(\varepsilon, \varepsilon_0) = o(I^q(\varepsilon, \varepsilon_0))$ , а  $I(\varepsilon, \varepsilon_0)$  определяется соотношением (10).

Пусть  $B_R \subset X'$  — некоторый фиксированный шар радиуса  $R$ . Обозначим через  $\mathfrak{R}_{p,q,x_0,Q,B_R,\delta}(G)$  семейство кольцевых  $(p, q, Q)$ -гомеоморфизмов  $f: G \rightarrow B_R \setminus K_f$  в точке  $x_0 \in G$  таких, что  $q \in (1, \alpha]$  и  $\sup_{x,y \in K_f} d'(x, y) \geq \delta > 0$ , где  $K_f \subset B_R$  — некоторый континуум. Тогда семейство отображений  $\mathfrak{R}_{p,q,x_0,Q,B_R,\delta}(G)$  является равностепенно непрерывным в точке  $x_0 \in G$ .

*Доказательство.* Пусть  $x_0 \in G$ ,  $f \in \mathfrak{R}_{p,q,x_0,Q,B_R,\delta}(G)$ . Поскольку пространство  $X$  локально связно и локально компактно, можно выбрать последовательность шаров

$B(x_0, \varepsilon_k)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ ,  $\varepsilon_k \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ , таких что  $V_{k+1} \subset \overline{B(x_0, \varepsilon_k)} \subset V_k$ , где  $V_k$  – континуумы в  $G$ . Заметим, что  $f(V_k)$  и  $K_f$  – континуумы в  $B_R$  (в частности,  $f(V_k)$  – континуум как непрерывный образ континуума, см. [14, теорема 1, III, § 41 и теорема 3, I, § 46]). Тогда по предложению 1 при некоторой постоянной  $C > 0$  получим:

$$M_p(K_f, f(V_k), X') \geq \frac{1}{C} \cdot \frac{\min\{\text{diam } K_f, \text{diam } f(V_k)\}}{R^{1+p-\alpha'}}. \quad (12)$$

Заметим, что при  $k \geq 1$  произвольная кривая  $\gamma \in \Gamma(K_f, f(V_k), X')$  соединяет  $f(B(x_0, \varepsilon_0))$  и  $X' \setminus f(B(x_0, \varepsilon_0))$ , поэтому найдётся точка  $y_1 \in |\gamma| \cap f(S(x_0, \varepsilon_0))$  и  $t_1 \in (0, 1)$  такие, что  $\gamma(t_1) = y_1$  и  $|\gamma|_{[0, t_1]} \in f(B(x_0, \varepsilon_0))$  (см. [1, предложение 13.3], см. также [14, теорема 1.I.46]). Обозначим  $\gamma_1 := \gamma|_{[0, t_1]}$ , и пусть  $\alpha_1 = f^{-1}(\gamma_1)$ . Заметим, что  $|\alpha_1| \in B(x_0, \varepsilon_0)$ . Заметим далее, что  $\alpha_1$  целиком не лежит ни в  $\overline{B(x_0, \varepsilon_{k-1})}$ , ни в  $X \setminus \overline{B(x_0, \varepsilon_{k-1})}$ , поэтому найдётся  $t_2 \in (0, t_1)$  такое, что  $\alpha_1(t_2) \in S(x_0, \varepsilon_{k-1})$  (см. [14, теорема 1.I.46]) и  $|\alpha|_{[t_2, t_1]} \in X \setminus \overline{B(x_0, \varepsilon_{k-1})}$ . Положим  $\alpha_2 = \alpha_1|_{[t_2, t_1]}$ . Заметим, что  $\gamma_2 := f(\alpha_2)$  является подкривой  $\gamma$ . Исходя из сказанного,

$$\Gamma(K_f, f(V_k), X') > \Gamma(f(S(x_0, \varepsilon_{k-1})), f(S(x_0, \varepsilon_0)), f(A)),$$

где  $A = \{x \in X : \varepsilon_{k-1} < d(x, x_0) < \varepsilon_0\}$ , откуда ввиду соотношения (3)

$$M_p(\Gamma(K_f, f(V_k), X')) \leq M_p(\Gamma(f(S(x_0, \varepsilon_{k-1})), f(S(x_0, \varepsilon_0)), f(A))). \quad (13)$$

Тогда из соотношений (12) и (13) вытекает, что

$$M_p(\Gamma(f(S(x_0, \varepsilon_{k-1})), f(S(x_0, \varepsilon_0)), f(A))) \geq \frac{1}{C} \cdot \frac{\min\{\text{diam } K_f, \text{diam } f(V_k)\}}{R^{1+p-\alpha'}}. \quad (14)$$

С другой стороны, из леммы 1 и условия  $F(\varepsilon, \varepsilon_0) = o(I^q(\varepsilon, \varepsilon_0))$  вытекает, что

$$M_p(\Gamma(f(S(x_0, \varepsilon_{k-1})), f(S(x_0, \varepsilon_0)), f(A))) \rightarrow 0$$

при  $k \rightarrow \infty$ , поэтому для любого  $\sigma > 0$  найдётся  $k_0 \in \mathbb{N} = k_0(\sigma)$  такой, что при всех  $k \geq k_0$

$$M_p(\Gamma(f(S(x_0, \varepsilon_{k-1})), f(S(x_0, \varepsilon_0)), f(A))) < \sigma.$$

В таком случае, из (14) вытекает, что при указанных  $k \in \mathbb{N}$

$$\min\{\text{diam } K_f, \text{diam } f(V_k)\} < \sigma. \quad (15)$$

Поскольку по условию  $\text{diam } K_f \geq \delta > 0$  для всех  $f$  и з рассматриваемого семейства отображений, то  $\min\{\text{diam } K_f, \text{diam } f(V_k)\} = \text{diam } f(V_k)$  начиная с некоторого номера  $k_1 \geq k_0$ ,  $k_1 = k_1(\sigma)$ . Тогда из (15) вытекает, что

$$\text{diam } f(V_k) < \sigma \quad (16)$$

при всех  $k \geq k_1$ . Из включений  $V_{k+1} \subset \overline{B(x_0, \varepsilon_k)} \subset V_k$  следует, что неравенство (16) выполнено также в шаре  $\overline{B(x_0, \varepsilon_k)}$  при  $k \geq k_1(\sigma)$ . Положим  $\varepsilon(\sigma) := \varepsilon_{k_1}$ . Окончательно, для числа  $\sigma > 0$  найдётся  $\varepsilon(\sigma) > 0$  такое, что при  $d(x, x_0) < \varepsilon(\sigma)$  выполнено



$d'(f(x), f(x_0)) < \sigma$ , что и означает равностепенную непрерывность семейства отображений  $\mathfrak{R}_{p,q,x_0,Q,B_R,\delta}(G)$  в точке  $x_0$ .  $\square$

*Доказательство теоремы 1* вытекает из леммы 2 и [1, лемма 13.2].

Действительно, согласно [1, лемма 13.2], условие  $Q \in FMO(y_0)$  влечёт, что при некотором  $\varepsilon_0 > 0$  и  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\int_{\varepsilon < d(y, y_0) < \varepsilon_0} Q(x) \cdot \psi^q(d(y, y_0)) d\mu(y) = O\left(\log \log \frac{1}{\varepsilon}\right),$$

где  $\psi(t) = (t \log \frac{1}{t})^{-\alpha/q} > 0$  и  $1 < q \leq \alpha$ . Как и прежде, определим  $I(\varepsilon, \varepsilon_0) := \int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t) dt$ , тогда

$$I(\varepsilon, \varepsilon_0) = \int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t) dt > \log \frac{\log \frac{1}{\varepsilon}}{\log \frac{1}{\varepsilon_0}}.$$

В таком случае, заключаем, что условия (9)–(10), фигурирующие в лемме 2, выполнены и, значит, из этой леммы вытекает требуемое утверждение.  $\square$

**3. О непрерывном продолжении гомеоморфизмов в метрическом пространстве.** Аналог следующей леммы доказывался В.И. Рязановым и Р.Р. Салимовым в работе [6] для случая, когда границы отображённых областей сильно достижимы, либо являются слабо плоскими (см. также статью [17]). Указанные условия на границы мы заменяем ниже требованием вида (7), при этом, здесь присутствуют также некоторые дополнительные ограничения на сами метрические пространства. Приведённое ниже утверждение установлено в [17] (см. также [6]) в частном случае, когда  $p = \alpha'$ ,  $q = \alpha$ . В случае произвольных  $p$  и  $q$  наличие упомянутой связи, насколько нам известно, не установлено.

**Лемма 3.** Пусть  $G$  – область в метрическом пространстве  $(X, d, \mu)$  с конечной хаусдорфовой размерностью  $\alpha \geq 2$ , а  $(X', d', \mu')$  – метрическое пространство, являющееся  $\alpha'$ -регулярным по Альфорсу, в котором выполнено  $(1; p)$ -неравенство Пуанкаре,  $p \in [\alpha' - 1, \alpha']$ . Пусть также область  $G$  локально линейно связна в точках границы, а область  $G' \subset B_R$  является  $QED$ -областью относительно  $p$ -модуля, где  $B_R$  – некоторый шар в  $X'$ , такой что  $\overline{B_R}$  – компакт в  $X'$ .

Предположим также, что найдётся  $\varepsilon_0 > 0$  и некоторая положительная измеримая функция  $\psi(t)$ ,  $\psi : (0, \varepsilon_0) \rightarrow (0, \infty)$ , такая что для всех  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$

$$0 < I(\varepsilon, \varepsilon_0) = \int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t) dt < \infty \quad (17)$$

и при  $\varepsilon \rightarrow 0$  и некотором  $q \in (1, \alpha]$

$$\int_{A(b, \varepsilon, \varepsilon_0)} Q(x) \cdot \psi^q(d(x, b)) d\mu(x) = o(I^q(\varepsilon, \varepsilon_0)), \quad (18)$$

где  $A := A(b, \varepsilon, \varepsilon_0)$  определено в (4). Тогда произвольное кольцевое  $(p, q, Q)$ -отображение  $f : G \rightarrow G'$  в точке  $b \in \partial G$  такое, что  $f(G) = G'$ , имеет непрерывное продолжение в точку  $b$ .

*Доказательство.* Поскольку  $G' \subset B_R$  и  $\overline{B_R}$  – компакт в  $X'$ , предельное множество  $C(f, b)$  не пусто.

Предположим противное, а именно, что отображение  $f$  не имеет непрерывного продолжения в точку  $b$ . Тогда найдутся, по крайней мере, две последовательности  $x_i, x'_i \in G, i = 1, 2, \dots$ , такие, что  $x_i \rightarrow b, x'_i \rightarrow b$  при  $i \rightarrow \infty, f(x_i) \rightarrow y, f(x'_i) \rightarrow y'$  при  $i \rightarrow \infty$  и  $y' \neq y$ . Отметим, что  $y$  и  $y' \in \partial D'$ , так как  $f$  – гомеоморфизм (см. [1, предложение 13.5]). Заметим, что в этом случае найдётся  $\delta > 0$  такое, что  $d'(f(x_i), f(x'_i)) \geq \delta > 0$  при всех  $i \in \mathbb{N}$ . Соединим точки  $x_i$  и  $x'_i$  кривой  $C_i$ , целиком лежащей в  $B(b, 2^{-i})$ , что возможно ввиду локальной связности области  $G$  в точке  $b$ . Пусть  $C'_i = f(C_i)$ , тогда  $\text{diam } C'_i \geq \delta > 0$  при всех  $i \in \mathbb{N}$ . Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что  $G \setminus \overline{B(b, \varepsilon_0)} \neq \emptyset$ . Выберем произвольную точку  $z_0 \in G \setminus \overline{B(b, \varepsilon_0)}$  и соединим её с точкой  $b$  локально спрямляемой кривой, лежащей в  $G$  (что возможно ввиду [1, предложение 13.2]). Тогда у этой кривой существует подкривая, лежащая в  $G \setminus \overline{B(b, \varepsilon_0)}$  ввиду [1, предложение 13.3] (см. по этому поводу также [14, теорема 1.1.46]). Эту подкривую обозначим через  $K$  и заметим, что она представляет собой некоторый фиксированный континуум в  $G \setminus \overline{B(b, \varepsilon_0)}$ , тогда при больших  $i \in \mathbb{N}$  имеем:  $K \subset G \setminus \overline{B(b, 2^{-i})}$ .

Тогда, с одной стороны, поскольку  $G'$  является  $QED$ -областью относительно  $p$ -модуля, то

$$M_p(\Gamma(C'_i, f(K), G')) \geq \frac{1}{A} \cdot M_p(\Gamma(C'_i, f(K), X')). \quad (19)$$

Поскольку  $X' = B_R$  является  $\alpha'$ -регулярным по Альфорсу и, кроме того, в  $X'$  выполнено  $(1; p)$ -неравенство Пуанкаре, ввиду предложения 1

$$M_p(\Gamma(C'_i, f(K), X')) \geq \frac{1}{C} \cdot \frac{\min\{\text{diam } f(K), \text{diam } C'_i\}}{R^{1+p-\alpha'}} \geq \delta_1 > 0, \quad (20)$$

где  $\delta_1$  не зависит от  $i$ . Из (19) и (20) вытекает, что

$$M_p(\Gamma(C'_i, f(K), G')) \geq \delta_2 > 0, \quad (21)$$

где  $\delta_2$  не зависит от  $i$ .

С другой стороны, рассмотрим семейство кривых  $\Gamma_i$ , соединяющих  $K$  и  $C_i$ . Рассмотрим функцию

$$\eta(t) = \begin{cases} \psi(t)/I(2^{-i}, \varepsilon_0), & t \in (2^{-i}, \varepsilon_0), \\ 0, & t \in \mathbb{R} \setminus (2^{-i}, \varepsilon_0), \end{cases}$$

где  $I(\varepsilon, \varepsilon_0) := \int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t) dt$ , удовлетворяет условию нормировки вида (6) при  $r_1 := 2^{-i}, r_2 := \varepsilon_0$ . В силу определения кольцевого  $(p, q, Q)$ -отображения  $f : G \rightarrow G'$  в точке  $b \in \partial G$ , а также соотношений (17)–(18) будем иметь, что

$$M_p(f(\Gamma_i)) = M_p(\Gamma(C'_i, f(K), G')) \leq \Delta(i), \quad (22)$$

где  $\Delta(i) \rightarrow 0$  при  $i \rightarrow \infty$ . Однако, (22) противоречит (21), что и доказывает утверждение леммы.  $\square$

*Доказательство теоремы 2* вытекает из леммы 3 на основании рассуждений, аналогичных рассуждениям, сделанных при доказательстве теоремы 1.  $\square$

**4. О равностепенной непрерывности гомеоморфизмов в замыкании области.** Обозначим через  $\mathfrak{R}_{p,q,Q,a_0,b_0}(G, G')$  семейство, состоящее из всех кольцевых  $(p, q, Q)$ -гомеоморфизмов  $f: G \rightarrow G'$  в каждой точке  $x_0 \in \overline{G}$  таких, что  $f(a_0) = a_1 \neq b_1 = f(b_0)$ ,  $f(G) = G'$ . Имеет место следующее утверждение.

**Лемма 4.** Пусть  $G$  – область в локально связном и сепарабельном метрическом пространстве  $(X, d, \mu)$  с конечной хаусдорфовой размерностью  $\alpha \geq 2$ , локально линейно связная в каждой точке своей границы, а  $(X', d', \mu')$  – метрическое пространство,  $\alpha'$ -регулярное по Альфорсу, в котором выполнено  $(1; p)$ -неравенство Пуанкаре,  $p \in [\alpha' - 1, \alpha']$ . Предположим, область  $G' \subset B_R$  является  $QED$ -областью относительно  $p$ -модуля,  $B_R$  – некоторый фиксированный шар в  $X'$ ,  $\overline{B_R}$  – компакт в  $X'$ , причём найдётся невырожденный континуум  $K \subset B_R \setminus G'$ .

Предположим, для каждой точки  $x_0 \in \overline{G}$ , некоторого числа  $\varepsilon'_0 \in (0, \varepsilon_0)$ ,  $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(x_0)$ , и семейства измеримых по Лебегу функций  $\{\psi_\varepsilon(t)\}$ ,  $\psi_\varepsilon: (\varepsilon, \varepsilon_0) \rightarrow (0, \infty)$ ,  $\varepsilon \in (0, \varepsilon'_0)$ , выполнено условие (9), где некоторая заданная функция  $F(\varepsilon, \varepsilon_0)$  удовлетворяет условию  $F(\varepsilon, \varepsilon_0) = o(I^q(\varepsilon, \varepsilon_0))$ , а  $I(\varepsilon, \varepsilon_0)$  определяется соотношением (10).

Тогда каждое отображение семейства  $\mathfrak{R}_{p,q,Q,a_0,b_0}(G, G')$ ,  $q \in (1, \alpha]$ , продолжается по непрерывности на  $\partial G$ , при этом, семейство  $\overline{\mathfrak{R}_{p,q,Q,a_0,b_0}(G, G')}$ , состоящее из всех продолженных таким образом отображений  $f: \overline{G} \rightarrow \overline{G'}$  является равностепенно непрерывным в каждой точке  $x_0 \in \overline{G}$ .

*Доказательство.* Заметим, что  $G$  – локально компактно. Действительно, так как  $\overline{G'}$  компакт, то шары  $\overline{B(y_0, \varepsilon)} \subset \overline{G'}$  компактны, а поскольку  $f(G) = G'$  при произвольном  $f \in \mathfrak{R}_{p,q,Q,a_0,b_0}(G, G')$ , то какова бы ни была точка  $x_0 \in G$ , множество  $f^{-1}(\overline{B(x_0, \varepsilon)})$  компактно как непрерывный образ компакта и, одновременно, является окрестностью точки  $x_0$ .

Кроме того, заметим, что  $G'$  имеет хаусдорфову размерность  $\alpha'$ , что вытекает из  $\alpha'$ -регулярности по Альфорсу пространства  $X'$  (см. рассуждения на с. 61 в [12]).

В таком случае, равностепенная непрерывность семейства продолженных по непрерывности отображений  $\mathfrak{R}_{p,q,Q,a_0,b_0}(G, G')$  (для удобства обозначения не меняем) во внутренних точках области  $G$  является утверждением леммы 2, а возможность непрерывного продолжения на границу – леммы 3. Осталось доказать равностепенную непрерывность семейства  $\mathfrak{R}_{p,q,Q,a_0,b_0}(G, G')$  в точках  $\partial G$ .

Предположим противное, тогда найдётся  $x_0 \in \partial G$  и число  $a > 0$  такое, что для каждого  $m = 1, 2, \dots$  существуют точка  $x_m \in \overline{G}$  и элемент  $f_m$  семейства  $\mathfrak{R}_{p,q,Q,a_0,b_0}(G, G')$  такие, что  $d(x_0, x_m) < 1/m$  и

$$d'(f_m(x_m), f_m(x_0)) \geq a. \quad (23)$$

Ввиду возможности непрерывного продолжения каждого  $f_m$  на границу  $G$ , мы можем считать, что  $x_m \in G$ .

В силу локальной линейной связности области  $G$  в точке  $x_0$  найдётся последовательность окрестностей  $V_m$  точки  $x_0$  с  $\text{diam } V_m \rightarrow 0$  при  $m \rightarrow \infty$ , такие что множества  $G \cap V_m$  являются областями и  $x_m \in G \cap V_m$ . Т.к. граничные точки области, локально связной на границе являются достижимыми из  $G$  некоторым локально спрямляемым путём, см. [1, предложение 13.2], мы можем соединить точки  $x_m$  и  $x_0$  непрерывной кривой  $\gamma_m(t) : [0, 1] \rightarrow G$  такой, что  $\gamma_m(0) = x_0$ ,  $\gamma_m(1) = x_m$  и  $\gamma_m(t) \in V_m$  при  $t \in (0, 1)$ . Можно считать, что  $|\gamma_m| \subset B(x_0, 1/m)$ . Обозначим через  $C_m$  образ кривой  $\gamma_m(t)$  при отображении  $f_m$ . Из соотношения (23) вытекает, что

$$\text{diam } C_m \geq a \quad \forall m \in \mathbb{N}. \quad (24)$$

Соединим точки  $a_0$  и  $b_0 \in G$  из условия леммы кривой  $\beta : [0, 1] \rightarrow G$ , лежащей в  $G$ , такой что  $\beta(0) = a_0$  и  $\beta(1) = b_0$ . Можно считать, что  $\text{dist}(|\beta|, \partial G) > \varepsilon_0(x_0)$ , где  $\varepsilon_0(x_0)$  – из условия леммы, а, как обычно,  $|\beta| = \{x \in G : \exists t \in [0, 1] : \beta(t) = x\}$  – носитель кривой  $\beta$ . Поскольку семейство  $\mathfrak{R}_{p,q,Q,a_0,b_0}(G, G')$  является равностепенно непрерывным в  $G$ ,  $\overline{B_R}$  – компакт, а  $G$  – сепарабельно,  $\mathfrak{R}_{p,q,Q,a_0,b_0}(G, G')$  является нормальным ввиду критерия Арцела–Асколи (см. [10, пункт 20.4]). В таком случае, не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что найдётся непрерывное отображение  $f : G \rightarrow B_R$ , такое что  $\sup_{x \in |\beta|} d'(f_m(x), f(x)) \rightarrow 0$  при  $m \rightarrow \infty$ . Тогда  $f(|\beta|)$  – компакт в  $X'$  как образ компакта  $|\beta| \subset G$  при непрерывном отображении  $f$ .

Возможны две ситуации: 1)  $f(|\beta|) \subset G'$ , тогда полагаем  $B := f(|\beta|)$ ; 2)  $f(|\beta|) \cap \partial G' \neq \emptyset$ . В этом случае полагаем  $t_0 := \sup_{t \in [0,1]} t : f(\beta(r)) \in G' \text{ при всех } r \in [0, t]$ .

Возьмём теперь произвольное  $s_0 < t_0$  и положим  $B := f(|\beta_{[0,s_0]}|)$ . Очевидно, в обеих из двух ситуаций  $B$  – невырожденный континуум в  $G'$ , при этом, существует компакт  $C = |\beta_{[0,s_0]}|$ ,  $0 < s_0 \leq 1$ , такой что  $f(C) = B$ . Тогда ввиду локально равномерной сходимости  $f_m$  к  $f$  найдётся  $k_0 \in \mathbb{N}$  такой, что

$$\text{diam}(f_m(C)) > \frac{\text{diam}(f(C))}{2} := \delta_0 > 0 \quad \forall m \geq k_0. \quad (25)$$

Рассмотрим теперь семейство кривых  $\Gamma_m = \Gamma(f_m(C), C_m, G')$ . Поскольку по условию  $G'$  является  $QED$ -областью, а пространство  $X'$  является  $\alpha'$ -регулярным по Альфорсу, в котором выполнено  $(1; p)$ -неравенство Пуанкаре, то ввиду предложения 1, (24) и (25) будем иметь:

$$M_p(\Gamma_m) \geq \frac{1}{A} \cdot M_p(\Gamma(f_m(C), C_m, X')) \geq \frac{1}{AC} \cdot \frac{\min\{\text{diam } f_m(C), \text{diam } C_m\}}{R^{1+p-\alpha'}} \geq M_1 > 0, \quad (26)$$

где  $M_1$  – некоторая постоянная, которая не зависит от  $m \in \mathbb{N}$ . С другой стороны, так как  $f_m$  – гомеоморфизм, то  $\Gamma_m = \Gamma(f_m(C), C_m, G') = f_m(\Gamma(C, |\gamma_m|, G))$ , причём  $C \subset G \setminus \overline{B(x_0, \varepsilon_0)}$ , а  $|\gamma_m| \subset B(x_0, 1/m)$ . Тогда по определению кольцевого  $(p, q, Q)$ -гомеоморфизма в точке  $x_0$

$$M_p(\Gamma_m) = M_p(\Gamma(f_m(C), C_m, G')) = M_p(f_m(\Gamma(C, |\gamma_m|, G))) \leq$$

$$\leq \int_{A(x_0, \frac{1}{m}, \varepsilon_0)} Q(x) \cdot \eta^q(d(x, x_0)) d\mu(x) \quad (27)$$

для каждой измеримой функции  $\eta : (\frac{1}{m}, \varepsilon_0) \rightarrow [0, \infty]$ , такой что  $\int_{\frac{1}{m}}^{\varepsilon_0} \eta(r) dr \geq 1$ . Заметим,

что функция

$$\eta(t) = \begin{cases} \psi(t)/I(1/m, \varepsilon_0), & t \in (1/m, \varepsilon_0), \\ 0, & t \in \mathbb{R} \setminus (1/m, \varepsilon_0), \end{cases}$$

где  $I(\varepsilon, \varepsilon_0) := \int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t) dt$ , удовлетворяет условию нормировки вида (6) при  $r_1 := 1/m$ ,  $r_2 := \varepsilon_0$ , поэтому из условий (27) и (9) вытекает, что

$$M_p(\Gamma_m) \leq \alpha(1/m) \rightarrow 0 \quad (28)$$

при  $m \rightarrow \infty$ , где  $\alpha(\varepsilon)$  – некоторая неотрицательная функция, стремящаяся к нулю при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , которая существует ввиду условия (9). Однако, соотношение (28) противоречит (26). Полученное противоречие указывает на то, что исходное предположение (23) было неверным, и, значит, семейство отображений  $\mathfrak{R}_{p,q,Q,a_0,b_0}(G, G')$  равномерно непрерывно в точке  $x_0 \in \partial G$ .  $\square$

*Доказательство теоремы 3* вытекает из леммы 4 на основании рассуждений, аналогичных рассуждениям, сделанных при доказательстве теоремы 1.  $\square$

**5. Заключительные замечания.** Большая часть условий, присутствующих в основных результатах статьи, по-видимому, являются только достаточными. Тем не менее, опишем некоторые требования, которые можно обозначить, как «близкие к необходимым».

Прежде всего, в теоремах 1, 2 и 3 нельзя, вообще говоря, отказаться от условия  $Q \in FMO$ , заменив его более слабым требованием  $Q \in L^p$ . Для простоты рассмотрим  $X = X' = \mathbb{R}^n$  со стандартной евклидовой метрикой и Лебеговой мерой. Пусть, кроме того,  $q = p = n$ . В этом случае отображение, удовлетворяющее оценке (8) будем называть просто «кольцевым  $Q$ -гомеоморфизмом». Ниже приведён результат, относящийся к равномерной непрерывности (по поводу устранения особенности см., напр., [1, предложение 6.3]).

Положим  $D := \mathbb{B}^n \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^n$ ,  $D' := B(0, 2) \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^n$ . Обозначим через  $\mathfrak{A}_Q$  семейство всех кольцевых  $Q$ -гомеоморфизмов  $g : \mathbb{B}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$  в точке 0. Справедливо следующее утверждение.

**Теорема 4.** Для каждого  $p \geq 1$  найдётся функция  $Q : \mathbb{B}^n \rightarrow [1, \infty]$ ,  $Q(x) \in L^p(\mathbb{B}^n)$  и последовательность  $g_m \in \mathfrak{A}_Q$  такая, что каждый элемент  $g_m$  имеет непрерывное продолжение в точку  $x_0 = 0$ , при этом, семейство  $\{g_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$  не является равномерно непрерывным в точке  $x_0 = 0$ .

*Доказательство.* Зафиксируем  $p \geq 1$  и  $\alpha \in (0, n/p(n-1))$ ,  $\alpha < 1$ , и определим

последовательность  $g_m : \mathbb{B}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$  следующим образом:

$$g_m(x) = \begin{cases} \frac{1+|x|^\alpha}{|x|^\alpha} \cdot x, & 1/m \leq |x| \leq 1, \\ \frac{1+(1/m)^\alpha}{(1/m)^\alpha} \cdot x, & 0 < |x| < 1/m. \end{cases}$$

Заметим, что каждое из преобразований  $g_m$  отображает  $D = \mathbb{B}^n \setminus \{0\}$  на проколотый шар  $D' = B(0, 2) \setminus \{0\}$ , и что точка  $x_0 = 0$  является устранимой особой точкой для  $g_m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ . Более того,  $\lim_{x \rightarrow 0} g_m(x) = 0$  и  $g_m$  постоянно на множестве  $|x| \geq 1/m$ . Действительно,  $g_m(x) \equiv g(x)$  при  $x : \frac{1}{m} < |x| < 1$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , где  $g(x) = \frac{1+|x|^\alpha}{|x|^\alpha} \cdot x$ .

Заметим, что  $g_m \in ACL(\mathbb{B}^n)$ . Действительно, отображение  $g_m^{(1)}(x) = \frac{1+(1/m)^\alpha}{(1/m)^\alpha} \cdot x$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , принадлежит классу  $C^1$  в  $B(0, 1/m + \varepsilon)$  при достаточно малых  $\varepsilon > 0$ . С другой стороны, отображения  $g_m^{(2)}(x) = \frac{1+|x|^\alpha}{|x|^\alpha} \cdot x$  принадлежат классу  $C^1$  в

$$A(0, 1/m - \varepsilon, 1) = \{x \in \mathbb{R}^n : 1/m - \varepsilon < |x| < 1\}$$

при достаточно малых  $\varepsilon > 0$ . Следовательно, отображения  $g_m$  являются липшицевыми в  $\mathbb{B}^n$  и, следовательно,  $g_m \in ACL(\mathbb{B}^n)$  (см., напр., [10, разд. 5, с. 12]). Как и выше, мы получаем, что

$$K_I(x, g_m) = \begin{cases} \left( \frac{1+|x|^\alpha}{\alpha|x|^\alpha} \right)^{n-1}, & 1/m \leq |x| \leq 1, \\ 1, & 0 < |x| < 1/m. \end{cases}$$

Заметим, что  $K_I(x, g_m) \leq c_m$  при каждом  $m \in \mathbb{N}$  и некоторой постоянной  $c_m$ . В таком случае,  $g_m \in W_{loc}^{1,n}(\mathbb{B}^n)$  и  $g_m^{-1} \in W_{loc}^{1,n}(B(0, 2))$ , поскольку  $g_m$  и  $g_m^{-1}$  являются квазиконформными (см., напр., [10, следствие 13.3 и теорема 34.6]). По [1, теорема 8.6], отображения  $g_m$  являются кольцевыми  $Q$ -гомеоморфизмами в  $D = \mathbb{B}^n \setminus \{0\}$  при  $Q = Q_m(x) := K_I(x, g_m)$ . Поскольку  $\alpha p(n-1) < n$ , мы получим, что  $Q \in L^p(\mathbb{B}^n)$ . С другой стороны, мы имеем, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} |g(x)| = 1, \quad (29)$$

и  $g$  отображает  $\mathbb{B}^n \setminus \{0\}$  на  $1 < |y| < 2$ . Из соотношения (29) вытекает, что

$$|g_m(x)| = |g(x)| \geq 1 \quad \forall \quad x : |x| \geq 1/m, \quad m = 1, 2, \dots,$$

т.е., семейство  $\{g_m\}_{m=1}^\infty$  не является равностепенно непрерывным в начале координат.

В условиях теоремы 3, даже в случае  $Q(x) \equiv 1$ , от условия фиксации, по крайней мере, одной внутренней точки области  $D$  каждым гомеоморфизмом  $f$  соответствующего семейства отображений, отказаться нельзя. Сказанное выше показывает следующий пример семейства конформных ( $Q(x) \equiv 1$ ) отображений на плоскости:  $f_t(z) = \frac{z-t}{1-tz}$ , которое при каждом фиксированном  $t \in (-1, 1)$  переводит область  $D = \mathbb{B}^2 \subset \mathbb{C}$  на  $D' = \mathbb{B}^2 \subset \mathbb{C}$ , см., напр., [18, соотношение (12), гл. V, § 1]. При этом, при каждом фиксированном  $z \in \mathbb{B}^2$ ,  $f_t(z) \rightarrow -1$  при  $t \rightarrow 1$ , в то же время,  $f_t(1) = 1$  при всех  $t \in (-1, 1)$ , откуда следует, что семейство  $f_t(z)$  не является равностепенно непрерывным в точке  $z_0 = 1$ . Относительно необходимости же фиксации двух и более точек области мы ничего не можем сказать – это условие может относиться к методу доказательства и, таким образом, не быть необходимым.

## Список литературы

- [1] *Martio O., Ryazanov V., Srebro U. and Yakubov E.* Moduli in Modern Mapping Theory. – New York: Springer Science + Business Media, LLC, 2009.
- [2] *Bishop C.J., Gutlyanskii V.Ya., Martio O. and Vuorinen M.* On conformal dilatation in space // Int. J. Math. Math. Sci. – 2003. – **22**. – P. 1397–1420.
- [3] *Gutlyanskii V. Ya., Ryazanov V. I., Srebro U., Yakubov E.* The Beltrami Equation: A Geometric Approach. – Developments in Mathematics, vol. 26. New York etc.: Springer, 2012.
- [4] *Ryazanov V., Sevost'yanov E.* Toward the theory of ring  $Q$ -homeomorphisms // Israel J. Math. – 2008. – **168**. – P. 101–118.
- [5] *Севостьянов Е.А.* Теория модулей, ёмкостей и нормальные семейства отображений, допускающих ветвление // Украинский матем. вестник. – 2007. – **4**, № 4. – С. 583–604.
- [6] *Рязанов В.И., Салимов Р.Р.* Слабо плоские пространства и границы в теории отображений // Укр. матем. вестник. – 2007. – **4**, № 2. – С. 199–234.
- [7] *Ковтонюк Д.А., Рязанов В.И., Салимов Р.Р., Севостьянов Е.А.* К теории классов Орлича-Соболева // Алгебра и анализ. – 2013. – **25**, № 6. – С. 50–102.
- [8] *Севостьянов Е.А.* Обобщение одной леммы Е.А. Полецкого на классы пространственных отображений // Укр. матем. ж. – 2009. – **61**, № 7. – С. 969–975.
- [9] *Севостьянов Е.А.* О равностепенной непрерывности гомеоморфизмов с неограниченной характеристикой // Математические труды. – 2012. – **15**, № 1. – С. 178–204.
- [10] *Väisälä J.* Lectures on  $n$ -Dimensional Quasiconformal Mappings. – Lecture Notes in Math. 229, Berlin etc.: Springer-Verlag, 1971.
- [11] *Fuglede B.* Extremal length and functional completion // Acta Math. – 1957. – **98**. – P. 171–219.
- [12] *Heinonen J.* Lectures on Analysis on metric spaces. – New York: Springer Science+Business Media, 2001.
- [13] *Сакс С.* Теория интеграла. – М.: ИЛ, 1949.
- [14] *Кураатовский К.* Топология, т. 2. – М.: Мир, 1969.
- [15] *Gehring F. W. and Martio O.* Quasiextremal distance domains and extension of quasiconformal mappings // J. d'Anal. Math. – 1985. – **24**. – P. 181–206.
- [16] *Adamowicz T. and Shanmugalingam N.* Non-conformal Loewner type estimates for modulus of curve families // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. – 2010. – **35**. – P. 609–626.
- [17] *Смолова Е. С.* Граничное поведение кольцевых  $Q$ -гомеоморфизмов в метрических пространствах // Укр. мат. журн. – 2012. – **62**, № 5. – С. 682–689.

[18] *Гурвиц А., Курант Р.* Теория функций. – Москва: Наука, 1968.

**Евгений Александрович Севостьянов**

Житомирский государственный университет им. И. Франко

кафедра математического анализа, ул. Большая Бердичевская, 40

г. Житомир, Украина, 10 008

тел. +38 066 959 50 34 (моб.), e-mail: esevostyanov2009@mail.ru